作业 Week 7

作业 1. 计算 $H_*(S^2, S^1)$, 其中 $S^1 \subset S^2$ 是 S^2 的赤道.

作业 2. 计算 $H^*(M, \partial M)$, 其中 M 是莫比乌斯带，∂M 是莫比乌斯带的边界.

作业 3. 根据闭曲面分类定理计算闭曲面 M 的同调群 $H_*(M; G)$, 其中 G 是任意 Abel 群. (使用 MV 序列)

作业 4. 设有 Abel 群短正合列

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0.$$

试证明对任意拓扑空间 X, 有链复形短正合列

$$0 \to S_*(X; G') \to S_*(X; G) \to S_*(X; G'') \to 0.$$

因此我们可得同调群长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\beta_*} H_q(X; G') \to H_q(X; G) \to H_q(X; G'') \xrightarrow{\beta_*} H_{q-1}(X; G') \to \cdots .$$

其中边缘映射 β_* 被称为 Bockstein 同态.

作业 5. 试对 $\mathbb{R}P^2$ 及 Klein 瓶 K 及系数序列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

计算 Bockstein 同态 β_*.

作业 6. 解决作业 5 的上同调版本。

作业 7. 设 p, q 是互素的自然数. 定义透镜空间 $L(p, q)$ 如下: 记

$$D^3 = \{(z, t) | z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, |z|^2 + t^2 \leq 1\}.$$

定义从上半球面到下半球面的映射 $f : S^2_+ \to S^2_-$ 为 $f(z, t) = (ze^{2\pi qi/p}, -t)$. 定义

$$L(p, q) = D^3/\{x \sim f(x), x \in S^2_+\}.$$

试给出 $L(p, q)$ 的一个胞腔结构, 并计算 $H_*(L(p, q))$.

作业 8. 试用胞腔同调计算复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 的上同调群 $H^*(\mathbb{C}P^n)$.

作业 9. 试把亏格为 2 的定向紧曲面实现为亏格为 4 的定向紧曲面的商空间使得每点的原像集是有限的. 并且把该商射实现为胞腔映射以及确定同调同态. (举任意一个例子画图，可不写证明)

作业 10. 把球面 S^n 看作 R^n 的一点紧化, $R^{n+m} \cong R^n \oplus R^m \cong R^m \oplus R^n$ 诱导了 S^{n+m} 与 $S^n \wedge S^m$ 和 $S^m \wedge S^n$ 的同胚, 我们固定一个 S^{n+m} 的定向. 试证明 $S^{n+m} \cong S^n \wedge S^m \xrightarrow{(x,y)\mapsto(y,x)} S^m \wedge S^n \cong S^{n+m}$ 的映射度为 $(-1)^{nm}$.