作业 Week 5

作业 1. 补充《同调论》定理 3.13 证明提纲 (A) 里 $\partial T + T\partial = Sd - id$ 的详细证明.

作业 2. 设 $n > 0, k \in \mathbb{Z}$. 证明：存在 $f : S^n \to S^n$ 使得 $\deg(f) = k$. (提示: 先考虑 $n = 1$ 的情形. 可以使用定理 5.4)

作业 3. 设 $f, g : S^n \to S^n$ 且对任意 $x \in S^n$, $f(x) \neq g(x)$. 证明：$f \simeq A \circ g$, 其中 A 是 S^n 的对径映射.

作业 4. 证明: 偶数维球面 S^{2n} 上不存在处处非零的切向量场.

作业 5. 考虑映射锥序列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{e} Cf \to Ce.$$

试证明 e 的映射锥 Ce 与 X 的双角锥 ΣX 同伦等价.

作业 6. 计算复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 的同调群。

作业 7. 考虑 $f : X \to Y$ 诱导的双角锥上的映射 $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$. 证明双角锥同构 $\sigma_* : \tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$ 是自然的, 即如下图表是交换的

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_q(X) \arrow[r, "\sigma_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \tilde{H}_{q+1}(\Sigma X) \arrow[d, "\Sigma f_*"] \\
\tilde{H}_q(Y) \arrow[r, "\sigma_*"] & \tilde{H}_{q+1}(\Sigma Y)
\end{tikzcd}$$

作业 8. 《同调论》习题 6.7.

作业 9. 试举出空间偶 (X, A) 与 (Y, B), 使得 $X \simeq Y$, $A \simeq B$, 但是 $H_*(X, A) \neq H_*(Y, B)$.

作业 10. 请写出两个空间偶之间的两个映射 $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ 之间的同伦的合适定义.